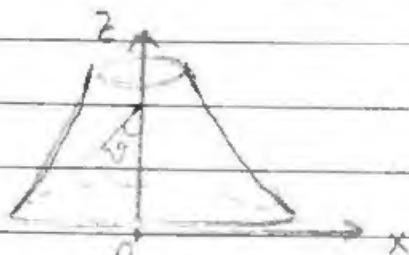


المحاورة الثالثة : نظري

السطح الدوراني :

ينتج السطح الدوراني عند دوران منحنى واقف من المستوى XOZ مثلاً حول المحور OZ



$$\left. \begin{array}{l} u_1 \leq u \leq u_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{array}$$

معادلة المنحنى الواقف من XOZ

الآن إذا دار المنحنى حول OZ بزواوية قدرها φ برسم مقطعاً من سطح دوراني

معادلاته الوسيطة هي :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(u) \cdot \cos v \\ y = \varphi(u) \cdot \sin v \\ z = \psi(u) \end{array} \right.$$

$$0 \leq v < 2\pi$$

المعادلة (1) هي المعادلات الوسيطة العامة للسطح الدوراني

يسمى المنحنى الواقف عند تقاطع السطح الدوراني «ستوكوي» OZ «محور التماثل»

يسمى المنحنى الناتج عن تقاطع السطح الدوراني «مستوي» OZ «محور العرض»

هي دوائر . مثلاً على ذلك : سطح الكرة ينتج عند دوران نصف دائرة

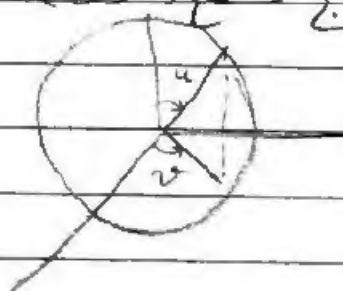
$$z = R \cos u \quad , \quad x = R \sin u$$

هنا OZ ينتج السطح (الكرة)

$$x = R \sin u \cdot \cos v$$

$$y = R \sin u \cdot \sin v$$

$$z = R \cos u$$



$$0 \leq u \leq \pi$$

$$0 \leq v < 2\pi$$

سطح الطارة : نصف قطرها

ينبع عن دوران دائرة أهول محور واقع في مستوى يبعد عن مركزها بمقدار a

$$0 < b < a$$

المعادلات الوسيطة لسطح الطارة هي :

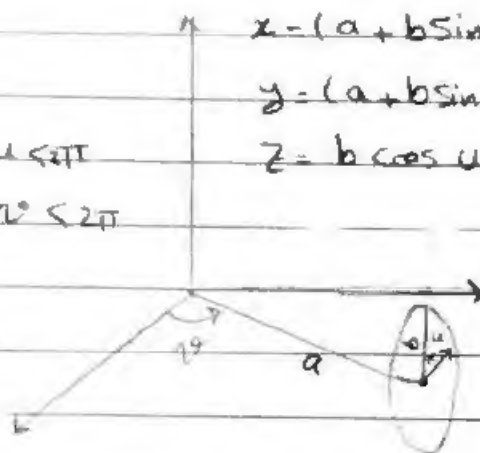
$$x = (a + b \sin u) \cos v$$

$$y = (a + b \sin u) \sin v$$

$$z = b \cos u$$

$$0 \leq u \leq \pi$$

$$0 \leq v \leq 2\pi$$



مثال : الاسطوانة الدورانية القائمة هي سطح دوراني ينبع عن دوران الخط

$$x = b$$

$$z = u$$

$$a < b = \text{const} \quad \text{طول } a$$

$$0 \leq u \leq \pi$$

ينبع ال سطح الدوراني (الاسطوانة الدورانية القائمة) (

معادلاته الوسيطة :

$$x = b \cos v$$

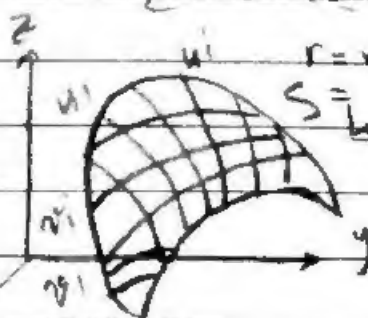
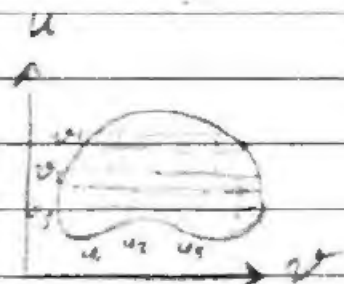
$$y = b \sin v$$

$$z = u$$

المميزات الاسطوانة على سطح

$$r = r(u, v)$$

$$S = \text{سطحاً بسيطاً محلياً}$$



الآن إذا أخذنا الوسيط u من النطاق المستوي D فإن صورة u على S هي $\gamma(u)$ حيث γ هي الدالة التي تعطي الوسيط u (مع v)

وبالعكس: إذا أخذنا الوسيط u من النطاق D فإن صورة u على S هي $\gamma(u)$ حيث γ هي الدالة التي تعطي الوسيط u (مع v)

مثال: الخطوط الإحداثية على S هي

الخط الإحداثي u (حيث $v = \text{const}$) هو خط المستوي
الخط الإحداثي v (حيث $u = \text{const}$) هو خط المستوي

الخطوط ذات الوسيط u هي خطوط الطول

الخطوط ذات الوسيط v هي خطوط العرض

أيضا النسبة u/v هي الطارة

الخط الإحداثي u (حيث $v = \text{const}$) هو الدائرة المولدة لخط الطارة

الخط الإحداثي v (حيث $u = \text{const}$) هو دائرة توارث المستوي xy

الخط النظامي:

ليكن $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ خطاً بحيث $\vec{r}(u, v) \in C^k$ و $k \geq 1$

نقول عن S سطح S الممثل بالمعادلة المتجهة \vec{r} أنه سطح نظامي

من المرتبة k

إذا كان $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ في كل نقطة من نقاط S

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \quad \text{و} \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

أخيراً إذا كان السطح معطى بالمعادلة $F(x, y, z) = 0$ فيمكن أن تكون
 هذه المركبات F_x, F_y, F_z هي ∇F وتكون السطح نظاماً
 متعامداً بالعودة إلى سطح الكرة

$$x = R \sin u \cos v$$

$$y = R \sin u \sin v$$

$$z = R \cos u$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos u \cos v & R \cos u \sin v & -R \sin u \\ -R \sin u \cos v & R \sin u \sin v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (R^2 \sin^2 u \cos v) \vec{i} + (R^2 \sin^2 u \sin v) \vec{j} + R^2 (\sin u \cos v) \vec{k} \neq 0$$

وهي نقاط القطبين (نقطة واحدة) $u=0$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

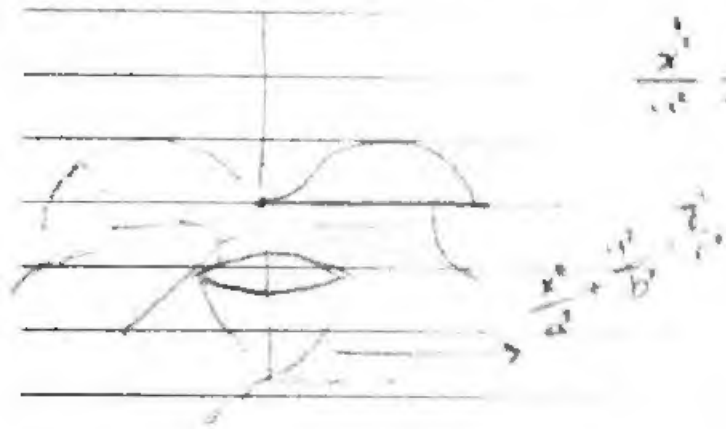
$$u = \pi$$

مثال: سطح القطع المكافئ الزائغ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

نلاحظ أن نقطة المبدأ تكون

فيما أن السطح نظاماً



المستوي المماس والعمود الناقص على سطح نظامي
 يمكن أن نلاحظ أيضاً معنى المعادلة $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$
 و M نقطة ماضية موقوفة $\vec{r}(u, v)$
 المستوي المماس للسطح S في M هو
 المماسي الخارج من M ونافذة هو المماس
 $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\vec{r} - \vec{r}(u, v)) = 0$ ونفرض M نقطة
 مقبولة على المستوي المماس موقوفة موقوفة

$\vec{r}(u, v)$ عندئذٍ لنفرض نقطة M من المستوي المماس يقع المماس $\vec{r}(u, v)$
 ماضية أي أن المماسات الثلاثة $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}$ تكون واقعة
 في المستوي المماس لذلك المعادلة المعتمدة للمستوي المماس

$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\vec{r} - \vec{r}(u, v)) = 0$$

بالإضافة المعادلة المعتمدة على المماس \vec{r} على المعادلة التالية

$x - x_0$	$y - y_0$	$z - z_0$	المستوي المماس
x_u	y_u	z_u	
x_v	y_v	z_v	

نرى المستوي الناقص على سطح نظامي

المستوي الناقص على سطح نظامي من نقطة ماضية M هو المماس M

ومن هنا المستوي المماس $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\vec{r} - \vec{r}(u, v)) = 0$

معادلاته الوسيطة:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ y_u & z_u & x_u \\ y_v & z_v & x_v \end{vmatrix} = 0$$

أي إذا كان السطح معطى بالمعادلة الماسية

$$F(x, y, z) = 0$$

فإنه المماس الذي يمثل تدفق الدالة F

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \text{grad } F$$

فإن $F(x, y, z)$ نقطة مقبولة من المستوي المماس عندئذٍ يكون:

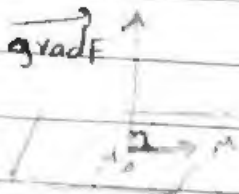
$$\vec{r} \cdot \text{grad } F = 0$$

$$(x-x_0)F_x + (y-y_0)F_y + (z-z_0)F_z = 0 \quad \text{والمعادلة التفاضلية للمستوي المماس}$$

$$(x_0, y_0, z_0)$$

والمعادلة الخط المماس

$$\frac{x-x_0}{F_x} = \frac{y-y_0}{F_y} = \frac{z-z_0}{F_z}$$



السطح المماس

هو سطح تولده اسرة مستقيقات تتوضع على مفتت نظامي

شبه الوضيات المختلفة هذه المستقيقات أسطر السطح

معرفة $f(u,v) \in C^k$ مفتت نظامي وأسرة

المستقيقات المولدة لسطح - تتوضع على هذا

المفتت عندئذ تكون معادلة السطح

المماس

$$\vec{r}(u,v) = f(u,v) + \vec{g}(u,v)$$

عندئذ $\vec{r}(u,v) \in C^k$ والقض الوسيط u

عالية فاصلة إذا كانت أسطر السطح المماس متوازنة يتولد عنها سطحاً فاصلاً

يشتمل السطح المماس في

معادلاته الوسيطة:

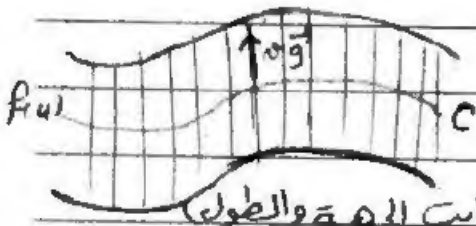
$$r(u,v) = f(u) + \vec{g}(u,v)$$

عندئذ متقاطعة محاور على مولد السطح وهو ثابت (ثابت البعد والطول)

$$\vec{r}_u = \vec{f}_u$$

$$\vec{r}_v = \vec{g}$$

$$r_u \times r_v = f_u \times g \neq 0$$



أي أن الطع الإبطائي سطح نظامي من جميع نقاطه .
 المتغيرات ذات الوسيط u هي الخط $u=1$ والموازية له والمماسات ذات الوسيط
 v هي الأسطر المولدة للسطح .

الصيغة التريمية الأولى (المماسات المولدة للسطح) :
 ليكن S سطحاً نظامياً معطى بالمعادلة :

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad (r_u \times r_v \neq 0)$$

ولنجد القاطن الناتج $d\vec{r}$ لموقع الموضع \vec{r} :

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$

نستعمل مربع قاطن $d\vec{r}^2$ بالصيغة التريمية الأولى للسطح S ونؤثر
 لها I

$$I = (d\vec{r})^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \cdot (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)$$

$$= \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v du dv + \vec{r}_v^2 dv^2$$

$$\text{بنمناصتهاً 1} \quad (\vec{r}_u)^2 = E$$

$$\vec{r}_u \vec{r}_v = F$$

$$(\vec{r}_v)^2 = G$$

عندها تكون الصيغة التريمية الأولى للسطح S بالشكل التالي :

$$I = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

ملحوظة هامة : الصيغة I هي تريمية $(d\vec{r})^2$

$$(d\vec{r}^2) \neq 0$$

منه ذلك المعادلة التريمية في u, v هي

$$Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 = 0$$

$$4(F^2 - EG) < 0$$

أي :
 $EG - F^2 > 0$

هذه المتباينة محققة في أي سطح
 نظامي .

ليكن $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ سطحاً نظامياً معطى على النطاق D المعين بالشكل :

$$D = \{ (u, v) \mid u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2 \}$$

الآن، إذا عتينا مسكياً من المنطقة D بالمعادلات الوسيطة:

$$u = u(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$v = v(t)$$

حيث صورته على سطح S هي منحني معين بالمعادلة المتجهة:

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$$

لف طول المعني بين النقطتين $\mu_1: \vec{r}(u(t_1), v(t_1))$ و $\mu_2: \vec{r}(u(t_2), v(t_2))$ على سطح S .

نعلم أن الطول يعطى بالمعادلة:

$$ds = |d\vec{r}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)}$$

$$= \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}$$

وبالتالي طول قوس المعني الواصل بين μ_1 و μ_2 يعطى بالعلاقة التالية:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

الزاوية بين مسجلين على سطح

ليكن γ و γ' منحنين واقعين على سطح النظام

S المعطى بالمعادلة $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

فليكن $dr = r_u du + r_v dv$

متجه المماس للمعني γ من النقطة M الموافقة للمماس \vec{r}_u

و $dr' = r_u du' + r_v dv'$ متجه المماس للمعني γ' من نقطة M' في المنحنى γ'

بالنسبة للزاوية بين المنحنى γ و γ' من النقطة M هي الزاوية بين المماسين

dr و dr' وتعطى بالعلاقة:

$$\cos \theta = \frac{dr \cdot dr'}{|dr| |dr'|}$$

$$(V_u du + V_g dv) (V_u' du' + V_g' dv')$$

$$\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \cdot \sqrt{E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2}$$

$$\cos \theta = \frac{F du du' + F (du dv' + dv du') + G dv dv'}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \cdot \sqrt{E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2}}$$

هذه هي خاصية

الزاوية بين المماسات المماسية للخطوط المماسية على سطح

بأن متجه المماس للخط المماسي في الوسيط u (حيث $dv=0$)

بأن متجه المماس للخط المماسي في الوسيط v (حيث $du=0$)

بموضعين المماسية عند $du=0$ ، $dv=0$

بأن الزاوية بين المماسات المماسية

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{E} \cdot \sqrt{G}}$$

بأنه من العلاقة الأخيرة أن الشرط اللازم والكافي لتكون الخطوط

المماسية متعامدة على سطح هو أن يكون $F=0$ وهذا يتحقق دوماً

في السطح المماسية